

Содержание

1	Теорема о трёх перпендикулярах	2
2	Угол между скрещивающимися прямыми	3
3	Угол между прямой и плоскостью	4
4	Угол между плоскостями	5
5	Расстояние от точки до прямой	6
6	Расстояние от точки до плоскости	7
7	Расстояние между скрещивающимися прямыми	8
8	Площадь сечения	9
9	Объём	10

1 Теорема о трёх перпендикулярах

1. Докажите, что противоположные ребра правильного тетраэдра перпендикулярны.
- 2.[ЕГЭ 2017] Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом. Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- 3.[ЕГЭ 2017] Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно. $AB = 13$. Докажите, что треугольник BA_1C_1 — прямоугольный.
- 4.[ЕГЭ 2019] Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{19}$, $SA = BC = 2\sqrt{6}$. Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .
- 5.[ЕГЭ 2021] В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина B_1E . Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

2 Угол между скрещивающимися прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми a и b называется угол между пересекающимися прямыми a_1 и b_1 , где a_1 параллельна a и b_1 параллельна b .

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и OC_1 , где O — центр грани $ABCD$.
3. В правильной шестиугольной пирамиде $SAB CDEF$ с вершиной S , стороны основания которого равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD .
4. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .
- 5.[ЕГЭ 2018] В правильном тетраэдре $ABCD$ точка H — центр грани ABC , а точка M — середина ребра CD .
 - а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.
 - б) Найдите угол между прямыми DH и BM .
- 6.[ЕГЭ 2018] В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
 - а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
 - б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

3 Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и её ортогональной проекцией на плоскость.

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — середина ребра $B_1 C_1$. Найти угол между прямой AM и плоскостью $CD_1 M$.
2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, в которой $AB = 10$, $SA = 8$, точка E — середина ребра SB . Найдите угол между прямой CE и плоскостью SBD .
3. Длины всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны между собой. Точка M — середина бокового ребра пирамиды AS . Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDS .
4. В правильном тетраэдре $ABCS$ точка M — середина ребра AS . Найдите угол между медианой BM грани ABS и плоскостью BCS .
5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра $A_1 B_1$, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$. Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC , если $AB = 12$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.

4 Угол между плоскостями

Угол между плоскостями — наименьший из двугранных углов, образованных при пересечении плоскостей. Угловая величина двугранного угла — это величина линейного угла данного двугранного угла. Чтобы найти линейный угол двугранного угла надо из произвольной точки на ребре двугранного угла провести в каждой плоскости по перпендикуляру к этому ребру. Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями BDD_1 и $AB_1 D_1$.
2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания призмы.
3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость через середины ребер DD_1 и $D_1 C_1$ и вершину A . Найдите угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.
4. [ЕГЭ 2016] Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.
 - а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 - б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
5. [ЕГЭ 2015] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .
 - а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
 - б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.
6. [ЕГЭ 2017] Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проецируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .
 - а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
 - б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро SD равно 8.
7. [ЕГЭ 2019] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC .
 - а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
 - б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .
8. [ЕГЭ 2021] В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB .
 - а) Докажите, что $SA = SC$.
 - б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC , если $AC = 16$, $AB = 20$, $SA = 26$.
9. [ЕГЭ 2021] Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, $AB = 24$, высота SH , проведённая к основанию, равна 14, точка K — середина AS , точка N — середина BC . Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.
 - а) Докажите, что PQ проходит через середину отрезка SN .
 - б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью APQ .

5 Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 2, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .
2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 6, найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1 .
3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 8, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1 .
4. [ЕГЭ 2018] В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
 - а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
 - б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 , если $AB = 21$, $BB_1 = 12$, $B_1C_1 = 16$.

6 Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

1. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 5. Найдите расстояние от вершины A до плоскости $B_1 C D_1$.

2.[ЕГЭ 2015] В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

- Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
- Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

3.[ЕГЭ 2016] В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L , соответственно, причём $AK = 2$, а $B_1 L = 4$. Точка M — середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость α параллельна ребру AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости α .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости α .

4.[ЕГЭ 2020] В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 7. На ребре CC_1 отмечена точка M , причём $CM = 1$.

- Точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1 B_1 C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .
- Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM .

5.[ЕГЭ 2021] В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ проведена высота SH . K — середина ребра SD , N — середина ребра CD . Плоскость ABK пересекает ребро SC в точке P .

- Докажите, что прямая PK делит отрезок NS пополам.
- Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS , если $SH = 15$, $CD = 16$.

7 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к этим прямым.

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{6}$, а боковое ребро равно 3. Найдите расстояние между прямыми AC и BS .
2. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 1. Найдите расстояние между диагональю куба AC_1 и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани CD_1 .
3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AD_1 и B_1C .
4. [ЕГЭ 2016] В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .
 - а) Докажите, что точка T является серединой SM .
 - б) Найдите расстояние между NT и SC .
5. [ЕГЭ 2017] Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань $ACC_1 A_1$ является квадратом.
 - а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
 - б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.
6. [ЕГЭ 2018] Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 5. Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .
7. [ЕГЭ 2018] В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1 .
 - а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
 - б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .
8. [ЕГЭ 2019] Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.
 - а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .
 - б) Найдите расстояние между ребрами BC и SA .
9. [ЕГЭ 2021] В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина B_1E . Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

8 Площадь сечения

1.[ЕГЭ 2015] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

2.[ЕГЭ 2016] В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

3.[ЕГЭ 2016] В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

4.[ЕГЭ 2018] На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q , причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS .

а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ , если площадь сечения DSB равна 6.

5.[ЕГЭ 2019] В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K и M — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой AD .

а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью α — квадрат.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если $AB = 2\sqrt{3}$.

6.[ЕГЭ 2020] Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB = 9$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 8$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 7 : 3$. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки M и K принадлежат плоскости α , которая перпендикулярна плоскости ABC .

а) Докажите, что точка принадлежит плоскости α .

б) Найдите площадь сечения α .

9 Объём

1.[ЕГЭ 2015] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 1 : 3$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

2.[ЕГЭ 2016] В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 8. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 3$, $CN = 1$.

- Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
- Найдите объём тетраэдра $MNB_1 B_1$.

3.[ЕГЭ 2017] Основанием прямой треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C C_1$ равны 15 и 9 соответственно. $AB = 13$.

- Докажите, что треугольник $BA_1 C_1$ — прямоугольный.
- Найти объём пирамиды $AA_1 C_1 B$.

4.[ЕГЭ 2017] Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Точки K , L и M — центры граней $ABCD$, $AA_1 D_1 D$ и $CC_1 D_1 D$ соответственно.

- Докажите, что $B_1 KLM$ — правильная пирамида.
- Найдите объём $B_1 KLM$.

5.[ЕГЭ 2018] В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

- Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .
- Найдите объём цилиндра.

6.[ЕГЭ 2020] В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. Точка M лежит на ребре BC , причём $BM = 1$, точка K лежит на ребре SC , причём $SK = 4$.

- Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Найдите объём пирамиды $CDKM$.

7.[ЕГЭ 2021] Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$, точка K — середина AS . Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

- Докажите, что площадь PQB относится к площади BSC как 3 : 4.
- Найдите объём пирамиды $KBQPC$.