Тренировочная работа №2

I часть

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+31} = 9$$

2. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

3. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите значение выражения:

$$\log_2 7 \cdot \log_7 4$$

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точка O — центр основания, $SO = 35$, $SD = 37$. Найдите длину отрезка BD.

6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точках производная функции $f(x)$ положительна?

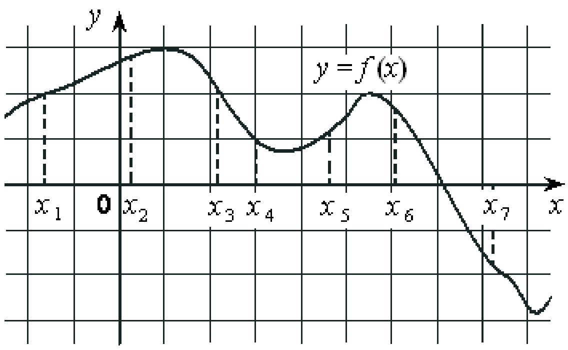

Рис. 1: График функции $y = f(x)$

7. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \alpha \cdot ST^4$, где $\alpha = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}$м^2, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

8. В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

9. На рисунке 2 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(22)$.

10. Симметричный игральный кубик бросили некоторое количество раз. В сумме выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что ровно два раза выпало два очка.

11. Найдите наибольшее значение функции $y = 11 \cdot ln(x+4) - 11x - 5$ на отрезке $[-3.5; 0]$.

II часть

12.
а) Решите уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

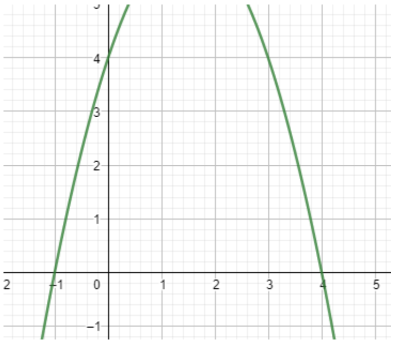

Рис. 2: График функции $y = ax^2 + bx + c$

13. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.
а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45.
б) Найдите объём цилиндра.

14. Решите неравенство $\log_3(\frac{1}{x} + 2) - \log_3(x + 5) > \log_3 \frac{x+4}{x^2}$.

15. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца; — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
— к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1021 тысячу рублей.

16. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.
а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите AD.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$$

на множестве $|x| \geqslant 1$ не меньше 6.

18. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.
а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?